Однако нормальное функционирование любого защитного слоя возможно лишь при наличии и содержании в исправном состоянии дренажных и водоотводных устройств.

Недостатком метода является сравнительно высокая стоимость геосинтетических материалов, отсутствие инструктивных и эксплуатационных данных по данным материалам в местных условиях, отсутствие опыта изготовления данных материалов на промышленных предприятиях и применения на магистральных и промышленных железнодорожных путях Украины. Поэтому актуальными являются вопросы разработки технологии и технических средств, обеспечивающих стабильность земляного полотна рельсового пути, применительно к рельсовому транспорту Украины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Клюкин А.Н. Земляное полотно – основа пути // Путь и путевое хозяйство: М., 2005, - № 10 – С. 10.
2. Chrismer S. Railway Track & Structures, 2001. № 4. – P. 32-34 – Проблемы устойчивости пути // Железные дороги мира. М.: № 12, 2003. – С. 69-71.
3. Говоруха В.В. Лопаков С.А. Проблемы устойчивости подрельсового основания и земляного полотна рельсового пути // Геотехническая механика: Межведомственный сборник научных трудов ИГТМ НАН Украины.– Днепропетровск, 2006. – Вып. 62. – С. 140 – 148.
4. Говоруха В.В. Физико-технические основы создания элементов рельсового транспорта шахт и карьеров. – К.: Наукова думка, 1992.- 200 с.
5. Jay T. International Railway Journal, 2002, № 3. – P. 34 – 35. – Геосинтетические материалы с улучшенными функциональными характеристиками // Железные дороги мира. М.: № 2, 2003. – С. 65 – 66.
6. Li D., Chrismer S. Railway Track & Structures, 1999, № 10. – P. 15 – 18. – Методы укрепления пути на слабом земляном полотне // Железные дороги мира. М.: № 2, 2003. – С. 65 – 66.



УДК 656.22:519.674



Д.К. Овчаренко

(ИГТМ НАН Украины)


## РАЦІОНАЛЬНЕ ПЛАНУВАННЯ ТЕХНІЧНОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ


Статья посвящена описанию математической постановки и методов решения задачи рационального планирования технического обслуживания и ремонта железнодорожных вагонов.


## RATIONAL MAINTENANCE PLANNING FOR TRANSPORT VEHICLES


This paper describes mathematical defining and solving problems of rational maintenance and repair planning for railroad cars.


Розглянемо транспортне підприємство, що має $n$ ремонтних баз. Відомі вартості ремонту транспортного засобу на кожній з цих баз, які складають відповідно $c_1$, $c_2$, ..., $c_n$. Відома продуктивність кожної з баз, тобто максимальна кількість відремонтованих транспортних засобів за один місяць на кожній з баз, ці величини складають $T_1$, $T_2$, ..., $T_n$ відповідно.

Підприємство планує утримувати не менш ніж $M$ транспортних засобів, причому сумарний загальний ресурс транспортних засобів повинен складати не менш ніж $K$ тон на один кілометр. Кожна з ремонтних баз гарантує, що ресурс відремонтованого нею транспортного засобу складає $\delta_1$, $\delta_2$, …, $\delta_n$ т/км відповідно.

Перед підприємством ставиться задача мінімізувати витрати на ремонт транспортних засобів, але в той же час мінімізувати максимальний час затрачений на ремонт цих транспортних засобів.

Математично дана задача має вигляд:

Знайти вектор значень $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ такий, щоб

$$F_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i \longrightarrow \min$$

$$F_2 = \max_{i\in\{1,2,...,n\}} \left\{\frac{x_i}{T_i}\right\} \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq M \,, \\ \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i \geq K \,, \\ \forall i = \overline{1,n} : x_i \geq 0 \,, \end{cases}$$

Величини $x_i$ повинні бути цілочисельними.

$n$ - кількість ремонтних баз;

$M$ - загальна кількість транспортних засобів;

$K$ - загальний ресурс транспортних засобів в т/км;

$c_i$ - вартість ремонту одного транспортного засобу на $i$-ій ремонтній базі, $i = \overline{1,n}$;

$T_i$ - продуктивність $i$-ї ремонтної бази (кількість відремонтованих транспортних засобів за 1 місяць), $i = \overline{1,n}$;

$\delta_i$ - ресурс продукції $i$-ї ремонтної бази (запас т/км до поточного ремонту);

$F_1$ - загальна вартість ремонту транспортних засобів;

$F_2$ - загальний час на капітальний ремонт транспортних засобів.

Для розв'язку даної двокритеріальної задачі математичного програмування, одним з критеріїв якої є критерій класу „мінімакс", будемо використовувати методи лінійного та нелінійного програмування, чисельні методи, уточнюючі алгоритми.

***Розв'язок задачі відносно першого критерію***

Задача раціонального планування технічного обслуговування транспортних засобів відносно першого критерію буде мати вигляд:

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min, \text{ де } \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \ge M, \\ \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i \ge K, \\ \forall i = \overline{1,n} : x_i \ge 0, \end{cases}$$

величини $x_i$ повинні бути цілочисельними.

Задача належить до класу задач лінійного програмування, тому для її розв'язання використаємо симплекс-метод і метод Гоморі [1] для знаходження цілочисельного розв'язку.

***Розв'язок задачі відносно другого критерію***

Задача раціонального планування технічного обслуговування транспортних засобів відносно другого критерію буде мати вигляд:

$$F_2 = \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \left\{ \frac{x_i}{T_i} \right\} \longrightarrow \min, \text{ де } \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \ge M, \\ \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i \ge K, \\ \forall i = \overline{1,n} : x_i \ge 0, \end{cases}$$

величини $x_i$ повинні бути цілочисельними.

Задача належить класу нелінійних однокритеріальних цілочисельних задач випуклого програмування. Розв'язання задачі складається з двох етапів:

- отримання нецілочисельного розв'язку;
- уточнення отриманого розв'язку до цілочисельного.

***Розв'язок задачі відносно другого критерію без умови на цілочисельність***

Нехай $M$ - загальний обсяг роботи, який потрібно виконати. Доведемо, що для того, щоб затратити якомога менше часу на виконання ремонтних робіт, потрібно розподілити кількість транспортних засобів, які потрібно відремонтувати на $i$-й базі пропорційно до продуктивності відповідної ремонтної бази. Тобто

$$\frac{x_1}{T_1} = \frac{x_2}{T_2} = \dots = \frac{x_n}{T_n} = \lambda^*,$$

де $\lambda^*$ - час, необхідний для виконання ремонтних робіт.

Припустимо, що вектор $\overline{X}$ опорний розв'язок задачі, який задовольняє наступним обмеженням

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = A \\ A \ge M. \end{cases}$$

Доведемо, що якщо вектор $\bar{X}$ буде задовольняти такій системі, то

$$\frac{x_1}{T_1} = \frac{x_2}{T_2} = \ldots = \frac{x_n}{T_n} = \lambda^* .$$

Нехай у нашому опорному розв'язкові

$$\frac{x_1}{T_1} \neq \frac{x_2}{T_2} \neq \ldots \neq \frac{x_n}{T_n},$$

тоді існують такі

$$x_i \text{, що } \max_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}\left\{\frac{x_k}{T_k}\right\} = \frac{x_i}{T_i}, \qquad \text{та } x_j \text{, що } \min_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}\left\{\frac{x_k}{T_k}\right\} = \frac{x_j}{T_j}.$$

Для $x_i$ та $x_j$ проведемо наступні перетворення, які не порушують обмежень:

$$x'_i = \frac{x_i + x_j}{T_i + T_j}T_i, \quad x'_j = \frac{x_i + x_j}{T_i + T_j}T_j, \qquad x'_k = x_k, \text{ де } k = \overline{1,n}, k \neq i, j$$

Доведемо допустимість та оптимальність такого перетворення. Оскільки повинна виконуватись умова $\sum_{i=1}^{n} x_i = A$, то покажемо, що отримані $x'_i$ та $x'_j$ не порушують її. Для цього доведемо, що $x'_i + x'_j = x_i + x_j$, так як інші $x_k$ залишилися без змін.

$$x'_i + x'_j = \frac{x_i + x_j}{T_i + T_j}T_i + \frac{x_i + x_j}{T_i + T_j}T_j = \frac{(x_i + x_j)T_i + (x_i + x_j)T_j}{T_i + T_j} = \frac{(x_i + x_j)(T_i + T_j)}{T_i + T_j} = x_i + x_j$$

Ми довели, що таке перетворення є допустимим. Доведемо тепер, що воно робить отриманий вектор $\bar{X}$ кращим за попередній. Для цього доведемо, що

$$\max_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}\left\{\frac{x'_k}{T_k}\right\} \leq \max_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}\left\{\frac{x_k}{T_k}\right\}.$$

Оскільки $\max_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}\left\{\frac{x_k}{T_k}\right\} = \frac{x_i}{T_i}$, то покажемо, що $\max_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}\left\{\frac{x'_k}{T_k}\right\} \leq \frac{x_i}{T_i}$, тобто повинні виконуватись умови:

$$\frac{x_i}{T_i} \geq \frac{x'_i}{T_i}, \qquad \frac{x_i}{T_i} \geq \frac{x'_j}{T_j},$$

оскільки інші $x_k$ залишилися без змін.

Припустимо, що ці умови не виконуються, тоді для першої нерівності:

$$\frac{x_i}{T_i} \leq \frac{x'_i}{T_i}, \qquad \frac{x_i}{T_i} \leq \frac{\frac{x_i + x_j}{T_i + T_j} T_i}{T_i}, \qquad x_i \leq \frac{x_i + x_j}{T_i + T_j} T_i,$$

$$x_i(T_i + T_j) \leq T_i(x_i + x_j), \qquad x_i T_j \leq T_i x_j, \qquad \frac{x_i}{T_i} \leq \frac{x_j}{T_j},$$

а це неможливо, оскільки $\max\limits_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} \left\{\frac{x_k}{T_k}\right\} = \frac{x_i}{T_i}$.

Для другої нерівності:

$$\frac{x_i}{T_i} \leq \frac{x'_j}{T_j}, \qquad \frac{x_i}{T_i} \leq \frac{\frac{x_i + x_j}{T_i + T_j} T_j}{T_j}, \qquad \frac{x_i}{T_i} \leq \frac{x_i + x_j}{T_i + T_j},$$

$$x_i(T_i + T_j) \leq T_i(x_i + x_j), \qquad x_i T_j \leq T_i x_j, \qquad \frac{x_i}{T_i} \leq \frac{x_j}{T_j},$$

а це неможливо, оскільки $\max\limits_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} \left\{\frac{x_k}{T_k}\right\} = \frac{x_i}{T_i}$.

Тобто $\max\limits_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} \left\{\frac{x'_k}{T_k}\right\} \leq \frac{x_i}{T_i}$, що й треба було довести.

Ми довели, що перетворення

$$x'_i = \frac{x_i + x_j}{T_i + T_j} T_i, \qquad x'_j = \frac{x_i + x_j}{T_i + T_j} T_j, \qquad x'_k = x_k, \text{де } k = \overline{1,n}, k \neq i, j$$

приводить до плану, який кращий за попередній, причому не порушуються обмеження. З цього перетворення випливає, що

$$\frac{x'_i}{T_i} = \frac{x'_j}{T_j} = \frac{x_i + x_j}{T_i + T_j},$$

тобто за скінчену кількість кроків буде досягнутий оптимальний план, який має вигляд

$$\frac{x_1}{T_1} = \frac{x_2}{T_2} = \ldots = \frac{x_n}{T_n} = \lambda^*.$$

Звідси $x_i = \lambda^* T_i$ для $\forall\, i = \overline{1,n}$. Фактично, ми отримали промінь, вздовж якого при заданому обсязі робіт досягається мінімум часу. Підставляючи $x_i$ в обмеження задачі, отримаємо

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda^* T_i \geq M; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i \lambda^* T_i \geq K. \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} \lambda^* \geq \dfrac{M}{\sum\limits_{i=1}^{n} T_i}; \\ \lambda^* \geq \dfrac{K}{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i T_i}. \end{cases}$$

Оскільки $F_2 = \lambda^* \to \min$, то $\lambda^* = \max\left\{\dfrac{M}{\sum\limits_{i=1}^{n} T_i};\ \dfrac{K}{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i T_i}\right\}$. Таким чином оптимальним нецілочисельним розв'язком задачі буде вектор

$$\overline{X}^* = \{x_i\} = \left\{\max\left\{\frac{MT_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} T_i};\ \frac{KT_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i T_i}\right\}\right\}$$

Якщо розглядати отриманий оптимальний розв'язок в геометричній інтерпретації, то він представляє собою точку перетину проміню $\dfrac{x_1}{T_1} = \dfrac{x_2}{T_2} = \ldots = \dfrac{x_n}{T_n} = \lambda^*$ з множиною обмежень.

Геометрично для трьох змінних задача відносно другого критерію буде мати вигляд (рис. 1).

*Розв'язок задачі відносно другого критерію з умовою на цілочисельність*

Знайти цілочисельний розв'язок, чи уточнити нецілочисельний розв'язок до цілочисельного, можна методом гілок та границь, чисельним методом, за допомогою симплексів, або за допомогою лінійного програмування.

Розглянемо один з цих методів.

## *Чисельний метод цілочисельного розв'язку задачі*

Для знаходження цілочисельного розв'язку перейдемо до нової задачі.

Оскільки цілочисельний розв'язок не є кращим у порівняні з нецілочисельним, то час, затрачений на ремонтні роботи, буде збільшуватись, тобто $\lambda \geq \lambda^*$. Тому хоча б одна змінна цілочисельного розв'язку $x_k$, $k = \overline{1,n}$ буде більше ніж $x_k^*$.

Введемо змінну $\Delta t$, яка показує наскільки погіршився критерій $F_2$ у результаті переходу до цілочисельного розв'язку, тобто $\Delta t = \lambda - \lambda^*$.

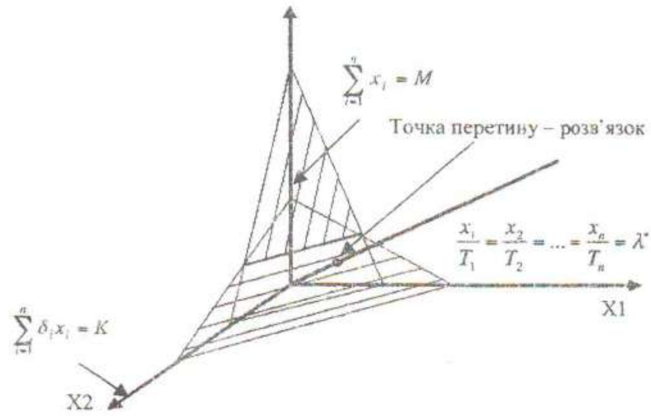


Рис. 1 – Оптимальний розв'язок задачі відносно другого критерію

Оскільки $\lambda \to \min \Rightarrow \lambda^* + \Delta t \to \min$, то наша задача зводиться до задачі знаходження мінімального допустимого відхилення $\Delta t$ від $F_2$.

Для розв'язання задачі введемо вектор $\overline{X}' = \{x'_i\}$, що показує мінімальне можливе значення цілочисельних $x_i$ за умови $x_i \geq x_i^*$.

Виходячи з визначення вектору $\overline{X}' = \{x'_i\}$ та того що, хоча б одна змінна цілочисельного розв'язку $x_k$, $k = \overline{1,n}$ більша за $x_k^*$, випливає, що мінімально можливе $\Delta t$ дорівнює:

$$\min \Delta t = \min_{i \in (1,n)} \left\{ \frac{x'_i - x_i^*}{T_i} \right\},$$

де $x'_i = [x_i^* + 0{,}5]$, $i = \overline{1,n}$ (найбільш близьке ціле число більше за $x_i^*$).

Знаходження цілочисельних змінних $x_i, i = \overline{1,n}$, які будуть гарантувати мінімально можливе $\Delta t$, будемо робити на основі принципів математичного програмування.

Пошук цілочисельного вектору $\overline{X}$ складається з n рівнів, на кожному з яких приймається рішення про включення чи виключення з розв'язку одного з $x_i$, $i = \overline{1,n}$.

Включену до розв'язку змінну будемо називати **відомою**. Нехай L – кількість відомих цілочисельних змінних $x_i$, $i = \overline{1,n}$. В залежності від значення L, будемо вважати, що ми знаходимося на відповідному рівні розв'язку задачі.

Для прийняття рішення про включення змінної $x_i, i = \overline{1,n}$ до розв'язку, розв'язуємо нашу задачу, без умови на цілочисельність, відносно другого критерію, але з урахуванням відомих змінних на рівні L як констант. Для отриманого результату будуємо вектор $\overline{X}' = \{x'_i\}$, побудова якого також відбувається з урахуванням відомих змінних на рівні L як констант.

Основним принципом включення змінної на кожному з рівнів до розв'язку є умова, що існуюче мінімально можливе $\Delta t$, тобто $\Delta t$ минулого рівня, не погіршиться.

Якщо попередня умова виконується, то вносимо до числа відомих змінних нову змінну $x_k$, що відповідає мінімальному $\Delta t = \min\limits_{i \in [1,n]} \left\{ \frac{x_i' - x_i^*}{T_i} \right\} = \frac{x_k' - x_k^*}{T_k}$ з урахуванням відомих змінних на цьому рівні як констант.

Під час розв'язку може виникнути ситуація, що на одному з рівнів неможливе включення жодної нової змінної до відповіді, оскільки це погіршить мінімально можливий $\Delta t$, що відповідає минулому рівню. Це означає, що змінна, яка була включена на минулому рівні до відомих змінних, не може гарантувати мінімальної цілочисельної відповіді за умови вже відомих до неї змінних, а тому її потрібно виключити з числа відомих змінних і повернутися на минулий рівень. При поверненні на минулий рівень, потрібно внести зміни до вектору $X' = \{x'\}$, а саме $x'_k = x'_k + 1$, де $x_k$ щойно виключена з числа відомих змінна, оскільки $x_k$ не може дорівнювати старому $x'_k$. Для отримання розв'язку визначаємо нову змінну, яку потрібно внести до числа відомих.

Розв'язок можна вважати знайденим, коли кількість змінних дорівнює кількості відомих змінних [2].

**Приклад задачі раціонального планування ремонтних робіт вагонного парку**

Інженерна постановка задачі.

Розглянемо залізничне підприємство, що має три ремонтних бази. Відомі вартості ремонту вагонів на кожній з цих баз, які складають відповідно 500, 315, 411 гривень за вагон. Відома продуктивність кожної з баз, тобто максимальна кількість вагонів, що можуть бути відремонтовані за один місяць на кожній з баз, ці величини складають 13, 17, 15 відповідно.

Підприємство планує утримувати не менш ніж 650 транспортних засобів, причому сумарний загальний ресурс вагонів повинен складати не менш ніж 21000 тон на один кілометр. Кожна з ремонтних баз гарантує, що ресурс відремонтованого нею вагону складає 40, 30, 62 т/км відповідно.

Перед підприємством ставиться задача мінімізувати витрати на ремонт вагонів, але в той же час мінімізувати максимальний час затрачений на ремонт цих вагонів [3].

Математична постановка задачі.

Потрібно знайти

$$F_1 = 500x_1 + 315x_2 + 411x_3 \rightarrow \min$$

$$F_2 = \max\left(\frac{x_1}{13}; \frac{x_2}{17}; \frac{x_3}{15}\right) \rightarrow \min,$$

де

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 650, \\ 40x_1 + 30x_2 + 62x_3 \ge 21000, \\ \forall i = \overline{1,n} : x_i \ge 0, \text{ величини } x_i \text{ повинні бути цілочисельними.} \end{cases}$$

*Розв'язок задачі відносно першого критерію.*

Розв'яжемо задачу за допомогою симплекс-методу, не враховуючи умову цілочисельності.

$\overline{X}$ =(0; 603,13; 46,87)  F1 = 209249,52 грн.  F2 = 35,48 місяців.

Отриманий розв'язок нецілочисельний, а тому для його уточнення скористаємося методом Гоморі. У результаті отримаємо:

$\overline{X}$ =(0; 604; 46)  F1* = 209 166 грн.  F2 = 35,53 місяців.

*Розв'язок задачі відносно другого критерію.*

Розв'яжемо задачу , не враховуючи умову цілочисельності, методом, що описаний вище:

Знайдемо оптимальний розв'язок задачі швидкодії при заданому обсязі робіт

$$\frac{x_1}{13} = \frac{x_2}{17} = \frac{x_3}{15} = \lambda,$$

де

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 650, \\ 40x_1 + 30x_2 + 62x_3 \ge 21000 \\ \forall i = \overline{1,n} : x_i \ge 0, \end{cases}$$

величини $x_i$ повинні бути цілочисельними, звідки отримаємо, що

$$\lambda = \max\left\{\frac{650}{13+17+15}; \frac{21000}{13\cdot 40 + 17\cdot 30 + 15\cdot 62}\right\} = \max\{14,44;\ 10,71\} = 14,44.$$

На основі отриманого $\lambda$ обчислюємо вектор $\overline{X}$ та значення критеріїв F1 та F2.

$\overline{X}$ =(187,78; 245,56; 216,66)  F1 = 260288,89 грн.  F2* = 14,44 місяців.

Отриманий розв'язок нецілочисельний, а тому для його уточнення скористаємося розглянутим вище чисельним методом:

$\overline{X}$ =(188; 245; 217)  F1 = 260 362 грн.  F2* = 14,47 місяців.

## ВИСНОВКИ

У даній статті викладені математична постановка та методи розв'язання задачі рационального планування технічного обслуговування і ремонту залізничних вагонів. Для цього була розглянута двокритеріальна задача математичного програмування, одним з критеріїв якої є нелінійний критерій класу „мінімакс". Методи, що використовувались для розв'язку задачі, були розроблені з метою універсалізації алгоритму розв'язку двокритеріальної задачі в загальному вигляді.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. А. Численные методы линейного программирования. М.: Наука, 1977. – 367 с.

2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. – 429 с.

3. Говоруха В.В. Физико-технические основы создания элементов рельсового транспорта шахт и карьеров. – К.: Наукова думка, 1992. - 200 с.